на искусственном спутнике дало бы новый способ проверки общей теории относительности. Довольно близкие методы предлагались (но не были опубликованы) Ферреллом [12] и позднее Пью [13].

Оказывается возможным вывести уравнения движения изолированных масс чисто геометрическим путем [14, 15], пользуясь лишь левой частью уравнений поля. Многие авторы получили высшие приближения уравнений движения, включающие эффекты излучения [16—18].

3. Принцип Маха

Принцип Маха утверждает, что свойство инерции полностью обусловлено взаимодействием материи. Таким образом, требуется приложить силу для того, чтобы сообщить некоторой частице ускорение относительно всей другой материи во Вселенной. В общей теории относительности по крайней мере часть центробежной силы вызывается взаимодействием. Рассмотрим пространственные компоненты уравнения геодезической линии, сохраняя члены порядка $(v/c)^2$:

$$-\frac{d^2x^i}{ds^2}=\Gamma^i_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2+2\Gamma^i_{j0}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^0}{ds}+\Gamma^i_{jk}\frac{v^jv^k}{c^2}$$

Здесь v — обычная трехмерная скорость частицы. С точностью до величин первого порядка по $h_{\mu\nu}$ символы Кристоффеля равны

$$\Gamma^i_{00}\approx-\frac{1}{2}h_{00,\,i}+h_{0i,\,0};$$
$$\Gamma^i_{j0}\approx\frac{1}{2}(h_{ij,\,0}+h_{i0,\,j}-h_{j0,\,i}),$$
$$\Gamma^i_{jk}\approx\frac{1}{2}(h_{ij,\,k}+h_{ik,\,j}-h_{jk,\,i}).$$

Подставляя эти значения в уравнение геодезической, получаем

$$c^2\frac{d^2x^i}{ds^2}=\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2\left[\nabla_i\left(\frac{c^2h_{00}}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial t}(ch_{0i})\right]+$$
$$+c^2\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^j}{ds}[h_{j0,\,i}-h_{i0,\,j}]-c^2h_{ij,\,0}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^0}{ds}-\Gamma^i_{jk}v^jv^k. \quad (9.32)$$

Используем уравнение (9.32) для исследования движения частицы внутри полой сферы радиусом R и с массой поля M. Пусть эта сфера вращается с угловой скоростью ω по отно-

шению к наблюдателю, находящемуся внутри нее. Обозначим через R_S, θ и φ сферические координаты элемента сферы, а через a, θ_0 и φ_0 сферические координаты той точки внутри нее, где вычисляется величина поля. Через U^μ обозначим четырехмерную скорость элемента сферы с точки зрения, помещенного внутри нее наблюдателя. Компоненты этой скорости в прямоугольной системе координат равны

$$U^1=-\frac{\omega R_S\sin\theta\sin\varphi}{c\sqrt{1-\omega^2R^2_S\sin^2\theta/c^2}},$$
$$U^2=\frac{\omega R_S\sin\theta\cos\varphi}{c\sqrt{1-\omega^2R^2_S\sin^2\theta/c^2}},$$
$$U^3=0,$$
$$U^0=\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2R^2_S\sin^2\theta/c^2}}. \quad (9.33)$$

Предположим, что механические натяжения в сфере малы, так что тензор энергии — импульса — натяжений приблизительно равен $\rho_\mu c^2U^\mu U^\nu$. Тогда выражения (7.13) принимают вид

$$\Phi_\mu{}^\nu=\frac{4G}{c^2}\int\frac{\rho_M U'_\mu U'^\nu d^3x'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \quad (9.34)$$

Через $\Phi_{\mu\nu}$ мы обозначили здесь величину $h_{\mu\nu}-{}^1\!/_2\delta_{\mu\nu}h$, так как φ уже означает координату. Имеет место равенство

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=[a^2+R^2_S-2aR_S(\cos\theta\cos\theta_0+$$
$$+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0))]^{1/2}. \quad (9.35)$$

Величина $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1}$ может быть разложена в ряд

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1}=\frac{1}{R_S}\left[1-\frac{a^2}{2R^2_S}+\frac{a}{R_S}(\cos\theta\cos\theta_0+\right.$$
$$+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0))+\frac{3a^2}{2R^2_S}(\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)+$$
$$\left.+\cos\theta\cos\theta_0)^2+\dots\right]. \quad (9.36)$$

Величина ρ_M теперь представляет собой плотность массы покоя элемента сферы, в то время как d^3x' есть трехмерный элемент объема в системе покоя наблюдателя. Чтобы выразить результат через массу покоя сферы, заметим, что элемент объема d^3x'' в системе, в которой сфера покоится, связан с d^3x' соотношением

$$d^3x'' = \frac{d^3x'}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}. \tag{9.37}$$

Подставляя (9.37) в (9.34) и производя интегрирование, получаем с точностью до v^2/c^2

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &= \frac{4GM}{c^2R_S}\left[1+\frac{\omega^2R^2{}_S}{3c^2}-\frac{2\omega^2a^2}{15c^2}+\frac{\omega^2a^2\sin^2\theta_0}{5c^2}\right],\\
\Phi_{11} &= \frac{4GM}{c^2R_S}\left[\frac{\omega^2R^2{}_S}{3c^2}+\frac{\omega^2a^2\sin^2\theta_0\sin^2\varphi_0}{5c^2}-\frac{\omega^2a^2}{15c^2}\right],\\
\Phi_{22} &= \frac{4GM}{c^2R_S}\left[\frac{\omega^2R^2{}_S}{3c^2}+\frac{\omega^2a^2\sin^2\theta_0\cos^2\varphi_0}{5c^2}-\frac{\omega^2a^2}{15c^2}\right],\\
\Phi_{33} &= 0,\\
\Phi_{12} &= -\frac{4GM\omega^2a^2\sin^2\theta_0\cos\varphi_0\sin\varphi_0}{5c^4R_S},\\
\Phi_{10} &= \frac{4GM\omega a\sin\theta_0\sin\varphi_0}{3c^2R_S},\\
\Phi_{20} &= -\frac{4GM\omega a\sin\theta_0\cos\varphi_0}{3c^2R_S},\\
\Phi_{30} &= \Phi_{23} = 0,\\
\Phi &= \Phi_\mu{}^\mu = -\frac{4GM}{c^2R_S}\left[1-\frac{\omega^2R^2{}_S}{3c^2}\right].
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Отсюда можно определить величины $h_{\mu\nu}$ как

$$h_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\Phi. \tag{9.39}$$

Из выражений (9.38) и (9.39) следует, что значение двух последних слагаемых в правой части уравнения (9.32) на порядок выше, чем $(v/c)^2$, и что в некоторых оставшихся членах можно отбросить множитель dx^0/ds. В таком случае уравнение геодезической принимает вид

$$c^2\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} = \nabla V - \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2\frac{\partial \boldsymbol{A}}{dt} + [\boldsymbol{v}\times[\nabla\times\boldsymbol{A}]], \tag{9.40}$$

где $V = c^2h_{00}/2$ и $A_i = ch_{0i}$. Полагая теперь $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ и записывая (9.40) в компонентах, получаем уравнения движения частицы внутри сферы

$$\begin{aligned}
c^2\frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{GM}{3c^2R_S}\left[\frac{4}{5}\omega^2x - 8\omega\frac{dy}{dt}\right],\\
c^2\frac{d^2y}{ds^2} &= \frac{GM}{3c^2R_S}\left[\frac{4}{5}\omega^2y + 8\omega\frac{dx}{dt}\right],\\
c^2\frac{d^2z}{ds^2} &= -\frac{8GM\omega^2z}{15c^2R_S}.
\end{aligned} \tag{9.40a}$$

Из уравнений (9.40а) видно, что если тело покоится внутри вращающейся сферы, то мы будем наблюдать действие на тело некоторой центробежной силы. Вообще говоря, этот эффект будет малым — он равен умноженному на $\sim GM/c^2R_S$ значению, которое следовало бы в случае такого вращения относительно остальных масс Вселенной. Приведенный результат весьма давно получен Тиррингом.

Если сфера не вращается, но ей сообщено поступательное относительно находящейся внутри нее пробной частицы ускорение, направленное по оси x^i, то из (9.34) и (9.37) следует, что

$$h_{10} = \Phi_{10} = cA_1 = -\frac{4GMv_S}{c^3R_S(1-v_S^2/c^2)^{1/2}}. \tag{9.41}$$

Здесь $\boldsymbol{v}_S$ — скорость сферы. Тогда из (9.40) для частицы, покоящейся в некоторый момент внутри сферы, мы получим уравнение

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \frac{4GM\boldsymbol{a}_S}{c^2R_S(1-v_S^2/c^2)^{1/2}}\left(1+\frac{(\boldsymbol{v}_S\cdot\boldsymbol{v}_S)}{c^2(1-v_S^2/c^2)}\right). \tag{9.40б}$$

В (9.40) через $\boldsymbol{a}_S$ обозначено ускорение нашей сферы.

Рассмотрим вместо сферы сплошное твердое тело массы M, придадим M ускорение относительно малой массы m. Если тело с массой m мгновенно покоится, то его ускорение можно вычислить с помощью уравнений (9.32) и потенциалов

(7.13а). Если ограничиться слагаемыми порядка v/c, то ускорение тела m равно

$$c^2 \frac{d^2 \boldsymbol{x}}{ds^2} = \nabla \frac{GM}{R_M} \left(1 + \frac{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{R}_M)}{cR_M} \right) + \\ + \frac{4GM}{c^2 R_M} \left(1 + \frac{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{R}_M)}{cR_M} \right) \boldsymbol{a} + \frac{4GM}{c^2} \left(\frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{R}_M)}{cR_M^2} \right) \boldsymbol{v}. \quad (9.40\text{в})$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{a}$ — соответственно скорость и ускорение массы M, а $\boldsymbol{R}_M$ — радиус-вектор от m до M. Уравнение (9.40в) содержит члены, зависящие от направления ускорения относительно радиус-вектора, соединяющего m и M. Они равны приблизительно величине изотропного эффекта ускорения, умноженной на v/c.

Рассматривая (9.40), мы можем заключить, что слагаемое ∇V включает центробежную силу, связанную с относительным вращением, а член $(dx^0/ds)^2 (d\boldsymbol{A}/\partial t)$ описывает силы, обусловленные относительной скоростью и относительным ускорением. Член $[\boldsymbol{v} \times [\nabla \times \boldsymbol{A}]]$ приводит к кориолисову ускорению. В случае вращающейся сферы величина $[\nabla \times \boldsymbol{A}]$ дает внутреннее поле, аналогичное магнитному полю внутри вращающейся заряженной сферы. Из этих рассуждений видно, что для Вселенной как целого $GM/c^2 R \approx 1$, если справедлив принцип Маха.

Приведенная трактовка показывает, что интегральные эффекты, согласно общей теории относительности, по крайней мере до некоторой степени зависят от взаимодействия материи. Однако это не удовлетворяет требованиям принципа Маха, так как в отсутствие всякой материи, кроме пробной частицы, эффекты инерции все еще сохраняются. Специальная теория относительности представляет собой предельный класс решений, когда не накладывается никаких граничных условий. Всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы инерция проявлялась как локальное свойство пространства и все члены, находящиеся в правой части уравнений (9.40), были устранены. Из уравнения типа (8.13) очевидно, что инерция, безусловно, изотропна[1]) вследствие

[1]) Коккони и Салпитер [19, 20] рассмотрели влияние анизотропности инертных свойств на структуру спектральных линий. В случае ядерного γ-излучения в кристаллах атомное магнитное поле приводит к расщеплению энергетического уровня ядра на $(2J + 1)$

формы тензора энергии — импульса — натяжений для частиц со скалярным типом массы покоя. По этим причинам эксперимент Хьюза, Робинсона и Бельтран-Лопеса [22] может рассматриваться как хорошее подтверждение современной формулировки общей теории относительности, а не сильного варианта принципа Маха.

Эйнштейн [23] и позднее Уилер исследовали вопрос о возможности толкования принципа Маха не как следствия уравнений поля, а как требования, накладываемого на граничные условия. Если система „изолированная", то следует ввести требование, чтобы на больших расстояниях метрика должным образом переходила в метрику остальной части Вселенной. Удовлетворение таких граничных условий означало бы введение взаимодействия материи остальной части Вселенной с массой „изолированной" системы. Осуществление такой программы могло бы дать соотношения, связывающие

равноотстоящих компоненты. При анизотропности инертных свойств ΔM каждая компонента будет сдвинута на величину $(\Delta M/M)\, TP_2$, где T — средняя кинетическая энергия нуклона, а P_2 — коэффициент, величина которого зависит от J, от магнитного квантового числа и ориентации магнитного поля относительно направления на галактический центр. При наблюдениях эффекта Мёссбауэра сравниваются частоты переходов в поглотителе и излучателе. При включении относительного движения количество отсчетов становится функцией относительной скорости источника и поглотителя. Резонанс наступает по мере перекрытия линий, если правила отбора допускают возбуждение квантом со сдвинутой частотой. Тогда число наблюдаемых пиков изменится, если произойдет изменение относительного расположения зеемановских компонент и если атомные поля будут ориентированы в одном направлении. Если в излучателе и поглотителе атомные магнитные поля ориентированы случайным образом, то анизотропия инерции приведет к уширению линий. Эксперимент с использованием эффекта Мёссбауэра не подтверждает этих соображений [21].

Недавно Хьюзом, Робинсоном и Бельтран-Лопесом [22] был произведен изящный и намного более чувствительный опыт по проверке анизотропности инертных свойств. Эти авторы измеряли частоту ядерного магнитного резонанса Li^7 в растворе $LiCl$ в течение 12 *час*. Вращение Земли изменило ориентацию установки относительно нашей Галактики. Этот метод обладает чрезвычайной чувствительностью ввиду большой величины кинетической энергии, связанной с $P_{3/2}$-состоянием протона в ядерном потенциале, и огромной степенью точности, с которой может быть измерена абсолютная величина магнитной ядерной резонансной частоты. Из полученного отрицательного результата следует, что $\Delta M/M < 10^{-20}$.